静岡理工科大学　情報学部　コンピュータシステム学科　卒業論文

「Python と Flask を用いた二階偏微分方程式求解 WEB アプリの開発」

1418136　山口朋也　【指導教員：幸谷智紀】

2020 年　2 月 10 日

1. 研究概要

本研究ではプログラミング言語 Python とそのライブラリ Flask を使用して偏微分方程式求解プログラム及びそれを使用した WEB アプリの開発を行った。

Python は、初心者でも分かりやすく、それがゆえに種々様々なライブラリが開発されている言語で、その中には高精度計算や、グラフや動画の作成が可能なものが多々含まれている。Flask はその中でも WEB アプリを作成することを可能にするライブラリである。

2. 二階微分方程式の差分法

二階偏微分方程式の一般式を

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})$$

とする。この二階偏微分方程式は二次曲線の分類のアナロジーを用いて、3 種に分類することができ、それぞれ双曲型、放物型、楕円型という。波動方程式が双曲型、熱方程式が放物型、Poisson 方程式が楕円型となる。以下、波動方程式の差分法を一例として表す。

一次元の波動方程式の境界値問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x \in (a,b) t > 0$$

において、境界条件

$$u(0,x) = u_0, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x)$$

$$u(t,a) = \alpha(t), u(t,b) = \beta(t)$$

の関数に対して差分法を用いて近似すると

$$\frac{u_{k+1,j} - 2u_{kj} + u_{k-1,j}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{k,j+1} - 2u_{kj} + u_{k,j-1}}{\Delta x^2}$$

となる。$r^2 \coloneqq (c\Delta t\ /\ \Delta x)^2$ と置いて整理すると

$$u_{k+1,j} = -u_{k-1,j} + 2(1-r^2)u_{kj} + r^2(u_{k,j+1} + u_{k,j-1})$$

となる。$u_k = [u_{k1}, u_{k2}, \cdots u_{k,m-1}]^T$ という m-1 次元ベクトルと

$$C = \begin{bmatrix} 2(1-r^2) & r^2 & & \\ r^2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 2(1-r^2) & r^2 \\ & & r^2 & 2(1-r^2) \end{bmatrix}$$

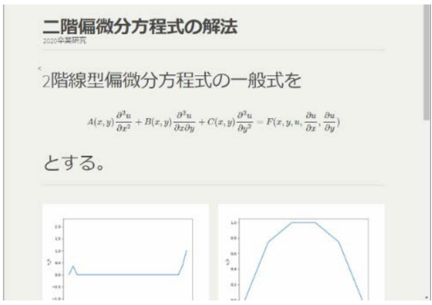
という三重対角行列 C を用いて

$$\boldsymbol{u}_{k+1} = C\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}_{k-1} + r^2[u_{k0} 0 \dots 0 u_{km}]^T$$

と表現できる。これを陽的差分法（explicit FDM）と呼ぶ。

3. WEB アプリ概要

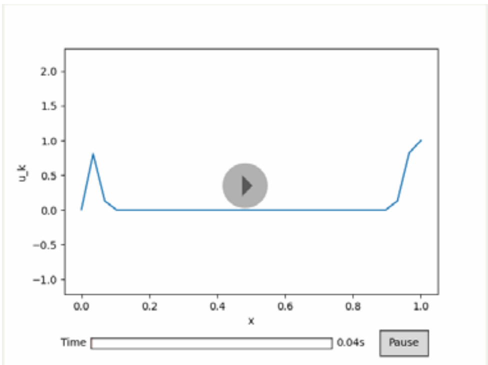
WEB アプリでは、波動方程式、熱方程式、Poisson 方程式を、それぞれ Python スクリプトを用いてリアルタイムで解き、解をグラフで表示している。これも波動方程式を一例として次に表す。



上部画像は、WEB アプリの目次ページにあたる。グラフの画像にマウスオーバーさせると、そのグラフが何という方程式かが画像に被るように表示される。そのまま画像をクリックすると、各方程式の簡易説明と、求解ページへのリンクがスライドされて現れる。

各ページでは、下部上画像のような方程式の説明と数値の入力フォームが記されている。

このフォームに任意の数字を入力し、送信することで、下部下画像のようなグラフが表示される。



波動方程式と熱方程式のページでは、この画像をクリックすると、動画として動き出すようになっている。Poisson 方程式のページでは、常にグラフが回転している。

4. 課題

アプリとしては、完成したといえるが、二階偏微分方程式にはまだほかにも方程式があり、現在実装された方程式も次数を上げて使用することもあるであろうから、それらを追加すること、また、動画を一時停止しようとしても、初めからに戻ってしまうため、一時停止を実装すること、この 2 つが今後の課題としてあげられる。