

1 概要

本研究の目的は多次元常微分方程式の解析解を「Scilab」というフリーの高機能演算ソフトウェアを用いて計算することである。本研究は2010年度に、本研究室の渥美一平が行った卒研のバージョンアップであり、彼が行った2,3次元の線形常微分方程式にも対応している。この研究で使われる Scilab とはフランスの国立研究機関である「INRIA」で開発されたフリーの数値計算用ソフトであり、プログラム環境も整えられており、ユーザ独自の計算プログラムを作成することが可能である。この機能を用いて多次元線形常微分方程式の解析解の計算と、ベンチマークテストを行った。

2 研究内容

本研究では、下記の斉次常微分方程式の初期値問題を解いていく。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = \exp(tA)x_0, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \quad (1)$$

(1)に対して、行列の対角化を用いて解析解を求める。そのため、行列 A は対角化可能なものに限定する。

解析解を求める方法は以下のとおりである。

$$\begin{aligned} T^{-1}AT &= \Lambda, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_m & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \\ \Rightarrow A^n &= T\Lambda^n T^{-1}, \quad A = T \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_m^n & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} T^{-1} \\ \Rightarrow \exp(tA) &= T^{-1} \exp(t\Lambda) T, \quad \exp(tA) = \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1 t) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \exp(\lambda_m t) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2) \end{aligned}$$

この λ_i は行列 A の固有値であり、 T は行列 A の固有ベクトルである。

(2)を用いて解析解を求めるプログラム(Best法と呼ぶ)と、Scilab内に入っている ODEsolver関数を用いて解析解を求めるプログラム(Ode法と呼ぶ)を作成し、次元数2,5,10,20の常微分方程式を解いて手法の違いによる計算の精度や計算にかかった時間を比較した。

Best法とOde法の真の値との相対誤差の最大値				
	次元数2	次元数5	次元数10	次元数20
Best	6.94E-16	8.47E-13	1.80E-13	2.42E-12
Ode	6.03E-11	9.80E-11	5.15E-11	3.17E-11

Best法とOde法の計算結果の比較(sec)				
	次元数2	次元数5	次元数10	次元数20
Best	0.015	0.031	0.063	0.156
Ode	0.016	0.016	0.016	0.047

結果、どの次元数でも Ode 法より Best 法のほうがより真の値に近い値が出ていたが、次元数が増えるにしたがって Best 法の精度が落ちていく傾向にあった。一方 Ode 法の精度は Best 法に比べると劣っていたが、次元数が増えても誤差の値に急激な差は見られなかった。計算時間は、Best 法より Ode 法のほうが早かった。Ode 法は 10 次元までは計算速度が変わらなかったが 20 次元では計算速度が遅くなっていった。一方 Best 法は次元数が多くなるに比例して計算速度も遅くなっていった。

3 感想

今回の研究では、微分積分の基礎を一から理解し直すことから、線形常微分方程式について学んだ。非斉次方程式の特殊解である、非斉次項 $(g(t))$ の計算でつまずき、斉次のみの常微分方程式の解析解計算とベンチマークテストという結果で終わってしまったことは反省している。

しかし、本研究の目的である多次元常微分方程式の解析解計算は一応達成でき、Scilab の基本的な操作法や行列計算についてはかなり身につける事ができたので自分にとってはプラスになったと思う。